

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2022-2023 уч.год
10 класс
Решения и ответы

1. Существует ли целое значение a , при котором уравнение

$$x^2 - 2023x + 2022a + 1 = 0$$

имеет целый корень?

(Найдите все такие целые значения a или докажите, что их нет.)

Решение. Произведение корней уравнения равно $x_1 \cdot x_2 = 2022a + 1$, если они существуют. Если один корень целый, то и второй корень целый. Сумма корней равна 2023. Так как произведение корней нечетно, то оба корня нечетные. Поэтому их сумма должна быть четной. Получаем, что целых корней уравнение иметь не может.

Ответ. Таких целых значений a не существует.

2. При всех неотрицательных a, b докажите неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \leq 3(a - \sqrt{ab} + b)^2$$

Решение. Представим левую часть как разность квадратов.

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ab = (a + b)^2 - (\sqrt{ab})^2 = (a + b - \sqrt{ab})(a + b + \sqrt{ab})$$

Множитель $(a + b - \sqrt{ab})$ неотрицателен, он представляется как $((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b})$, считаем известным неравенство $x^2 - xy + y^2 \geq 0$. Получаем

$$\begin{aligned}(a + b - \sqrt{ab})(a + b + \sqrt{ab}) &\leq 3(a - \sqrt{ab} + b)^2 \\(a + b - \sqrt{ab})(3(a - \sqrt{ab} + b) - (a + b + \sqrt{ab})) &\geq 0 \\(a + b - \sqrt{ab})(2a - 4\sqrt{ab} + 2b) &\geq 0 \\(a + b - \sqrt{ab})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0\end{aligned}$$

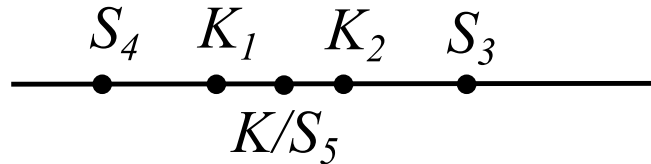
Оба множителя неотрицательны, все переходы равносильны.

Существуют и другие способы доказательства.

3. Точки прямой окрашены в два цвета (каждый цвет присутствует, каждая точка имеет ровно один цвет). Докажите, что найдутся три точки одного цвета, такие, что одна лежит ровно посередине между двумя другими.

Решение. Будем считать, что точки окрашены в красный и синий цвет. Если на прямой ровно одна точка красного цвета, а все остальные окрашены в синий цвет, то задача имеет очевидное решение – берем две синие точки по одну сторону от красной, и середина отрезка между синими точками тоже будет синей. Теперь рассмотрим общий случай. Выберем две красные точки K_1 и K_2 , см. рис. Номера точек показывают очередность их появления на рисунке. Смотрим, в какой цвет окрашена точка,

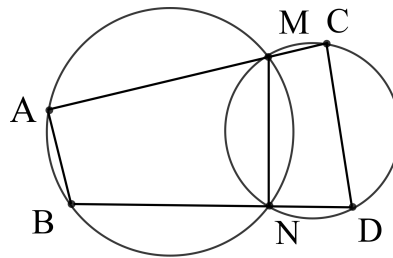
лежащая на расстоянии K_1K_2 вправо от точки K_2 . Если эта точка красная, то искомые три точки найдены. Если эта точка синяя, обозначенная S_3 , то смотрим, в какой цвет окрашена точка, лежащая на расстоянии K_1K_2 влево от точки K_1 . Если эта точка красная, то искомые три точки найдены. Если эта точка синяя, обозначим ее S_4 . Теперь посмотрим, в какой цвет окрашена точка, лежащая посередине между K_1 и K_2 (она же будет являться серединой отрезка S_4S_3). Если середина отрезка K_1K_2 окрашена в красный цвет, то искомыми являются точки K_1, K_5, K_2 . Если середина отрезка K_1K_2 окрашена в синий цвет, то искомыми являются точки S_4, S_5, S_3 .



4. Две окружности пересекаются в точках M и N . Через точку M проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке A , вторую окружность в точке C . Через точку N проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке B , вторую окружность в точке D . Докажите, что

$$\sphericalangle AM + \sphericalangle MC = \sphericalangle BN + \sphericalangle ND$$

где $\sphericalangle AM, \sphericalangle MC, \sphericalangle BN, \sphericalangle ND$ – угловые величины дуг, показанных на рисунке (выбираются дуги, не содержащие точек второй прямой).



Решение. 1й способ. Четырехугольники $AMNB$ и $CMND$ вписанные, поэтому $\angle MNB = 180^\circ - \angle MAB$, $\angle MND = \angle MAB$, $\angle MCD = 180^\circ - \angle MAB$, $\angle DCK = \angle MAB$. Отсюда прямые AB и CD параллельны. Проведем прямую MN до пересечения с прямыми AB и CD . Углы $\angle AXU$ и $\angle XYD$ равны. Как известно, они выражаются полуразностью соответствующих дуг.

$$\angle AXU = \frac{1}{2}(\sphericalangle AM - \sphericalangle BN) = \angle XYD = \frac{1}{2}(\sphericalangle ND - \sphericalangle MC)$$

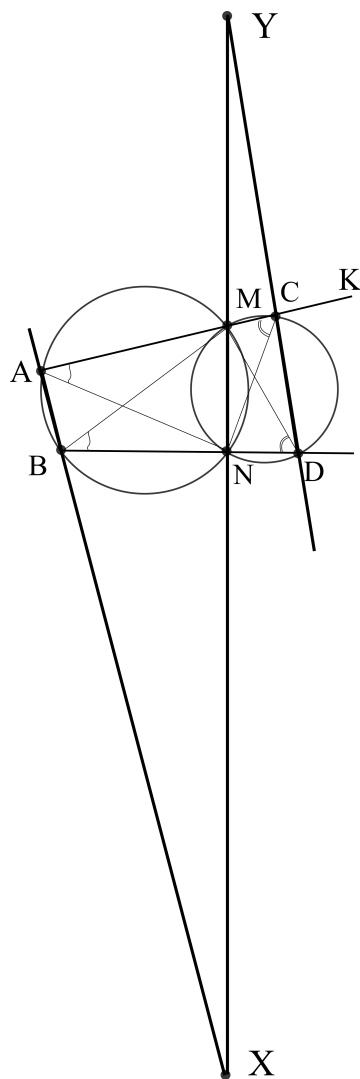
В обеих частях равенства вычитаем из большей дуги меньшую. Это можно сделать, так как точки X и Y лежат по разные стороны от AC и BD . Из этого равенства следует

$$\sphericalangle AM + \sphericalangle MC = \sphericalangle BN + \sphericalangle ND$$

2й способ. Заметим, что $\angle MAN = \angle MBN$, $\angle MCN = \angle MDN$, поэтому треугольники ANC и BMD подобны, и углы $\angle ANC$ и $\angle BMD$ равны. Каждый из этих углов равен сумме двух вписанных углов, опирающихся на соответствующие дуги.

$$\angle ANC = \angle ANM + \angle MNC = \angle BMD = \angle BMN + \angle MND$$

$$\frac{1}{2}(\sphericalangle AM + \sphericalangle MC) = \frac{1}{2}(\sphericalangle BN + \sphericalangle ND)$$



5. Стая, в которой 64 воробья, рассаживается по деревьям. Далее, серией перелетов, стая меняет размещение на деревьях. Если на каком-то дереве оказывается не менее половины всех птиц, то с него на каждое из остальных деревьев перелетает ровно столько воробьев, сколько уже сидит на этом дереве (*и это считается за один перелет*). Если в какой-то момент на двух деревьях окажется по 32 воробья, то они перелетают с какого-то одного дерева по такому же правилу. Первоначально воробьи так расселись по деревьям, что стае пришлось сделать 6 перелетов, и после этого стая успокоилась. Докажите, что все воробьи собрались на одном дереве.

Решение. После первого перелета на каждом дереве, на которое перелетели воробьи, окажется их число, делящееся на 2. Общее число воробьев тоже делится на 2, поэтому остаток воробьев на первом дереве, с которого перелетели, тоже делится на 2. Аналогично, после второго перелета на каждом дереве, на которое перелетели, число воробьев делится на 2^2 , т.е. на 4. Общее число воробьев делится на 4, поэтому остаток воробьев на дереве, с которого перелетели, делится на 4. После шестого перелета будет такое же распределение по деревьям – на каждом дереве число воробьев будет делиться на 2^6 , т.е. на 64. Поэтому на каком-то дереве окажутся все 64 воробья, а на остальных деревьях будет по 0 воробьев.

Первоначальная рассадка: 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32 воробья на дереве соответственно. Другая первоначальная рассадка: 1, 63 воробья на дереве соответственно. Традиционно, при решении таких задач проверка корректности условия не обязательна, т.е. предъявление первоначальной рассадки не требуется.